中原大學 114 學年度 ■上學期 □下學期 考試命題紙 ■期末考

科目名稱: 微積分 (上)(A 群)
考試時間: 1 月 7 日第二節

I. 填充題. (25 分)

1. Evaluate the integral $\int_{-1/2}^{1}(1+2x)^{100}dx =$ $\frac{3^{101}}{202}$

2. Find $\frac{d}{dx}\int_{0}^{x}\sin(t^2)\,dt =$ $\sin(x^2)$

3. Let $f(x)=\int_{2}^{x}\sqrt{1+t^2}\,dt$. Find $(f^{-1})'(0) =$ $\frac{1}{\sqrt{5}}$

4. Find $\int\frac{\sin\theta}{\cos^2\theta}\,d\theta =$ $\sec\theta + C$

5. Find $\sin\left(\cos^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)+\cos^{-1}\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)\right) =$ 1

II. 計算、證明題. (80 分)

1. Evaluate $\int_0^3 (1+\sqrt{9-x^2}+|x-1|)\,dx$.

2. (a) Find $\int \dfrac{2t^2+t\sqrt{t}-t^{2/3}+1}{t^2}\,dt$.

   (b) Find $\int (\sin 2x+\cos 2x-\sec^2 2x+\tan 2x\sec 2x)\,dx$.

3. Let $F(x)=\int_x^{x^2}\cos(t^2)\,dt$. Find $F'(0)$.

4. Find (a) $\int_0^4 \sqrt{2x+1}\,dx$, (b) $\int_1^2 \dfrac{1}{x^2}\sqrt{1+\dfrac{1}{x}}\,dx$.

5. Find (a) $\dfrac{d}{dx}\sin^{-1}(2x)$, $(b)\dfrac{d}{dx}x\tan^{-1}(\sqrt{x})$.

6. Find (a) $\int \dfrac{x^3}{\sqrt{1-x^8}}\,dx$, $(b)\int \dfrac{x}{x^4+9}\,dx$.

7. (a) Express $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^{\frac{7}{5}}}(\sqrt[5]{1^2}+\sqrt[5]{2^2}+\ldots+\sqrt[5]{n^2})$ as the definite integral $\int_0^1 f(x)\,dx$.

   (b) Evaluate $\int_0^1 f(x)\,dx$ in (a).

8. Let $f(x)=x^3+3\sin x+2\cos x$. Find (a) $f^{-1}(2)$, (b) $(f^{-1})'(2)$.

9. Find $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left(\dfrac{\sin x}{1+x^2}+\dfrac{x^9}{1+x^4}+x^2+\cos x\right)\,dx$.

10. Let $F(x)=\int_{-x}^{x}\sqrt{x^2-t^2}\,dt$, where $x\neq 0$. Find $F'(x)$.

    (Hint: 先利用定積分與圖形面積之關係，計算出 $F(x)$)

114 學年度第 1 學期理、工、電資學院微積分 (A 群) 期中考答案 2026.1.7

題號	答案	來源
1	$\frac{11}{2}+\frac{9}{4}\pi$	4.2 − 習題 44, 45*
2	$(a)\ 2t+2t^{\frac{1}{2}}+3t^{\frac{-1}{3}}-t^{-1}+C,\ \ (b)\ \frac{-1}{2}(\cos 2x-\sin 2x+\tan 2x-\sec 2x)+C$	4.4 − 例題 5, 1
3	-1	4.3 − 習題 61*
4	$(a)\ \frac{26}{3},\quad (b)\ \frac{2}{3}\left[2^{3/2}-\left(\frac{3}{2}\right)^{3/2}\right]$	4.5 − 例題 6, 習題 6
5	$(a)\ \frac{2}{\sqrt{1-4x^2}},\quad (b)\ \tan^{-1}(\sqrt{x})+\frac{\sqrt{x}}{2+2x}$	6.6 − 例題 5*
6	$(a)\ \frac{1}{4}\sin^{-1}(x^4)+C,\quad (b)\ \frac{1}{6}\tan^{-1}\left(\frac{x^2}{3}\right)+C$	6.6 − 習題 71, 例題 9
7	$(a)\ \int_0^1 \sqrt[5]{x^2}\,dx,\quad (b)\ \frac{5}{7}$	4.2 − 習題 83*
8	$(a)\ 0,\ \ (b)\ \frac{1}{3}$	6.1 − 習題 42
9	$2+\frac{\pi^3}{12}$	4.5 − 例題 9
10	If $x>0, F'(x)=\pi x,$ if $x<0, F'(x)=-\pi x$	4.2 − 應用

* 為非勾選習題、勾選習題類似題.
證明題過程略過.